Решение задачи распределения ресурсов методом динамического программирования

Лабораторная работа 8

Задача распределения ресурсов имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i\ (x_i) \to \max \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = c, \tag{2}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}, \tag{3}$$

где n – число технологических процессов, между которыми нужно распределить сырье в объеме c, с целью получения максимальной прибыли; x_i – количество сырья, выделяемое на i-й процесс;

$f_i(x_i)$ – прибыль, получаемая в i-м процессе при использовании в нем сырья в объеме x_i, $i = \overline{1, n}$.

Так как целевая функция и ограничения в задаче (1)–(3) сепарабельны, то к ней применим метод динамического программирования.

Пусть c – целое число и x_i, $i = \overline{1, n}$ – могут принимать лишь целые неотрицательные значения. В этом случае для задачи (1)–(3) удобно использовать следующую табличную реализацию метода динамического программирования.

1. Рассчитываем функцию Беллмана $B_k(y)$ путем последовательного решения уравнения Беллмана:

$$B_k(y) = \max_{0 \leq z \leq y} [f_k + B_{k-1}(y-z)], \quad k = \overline{2, n}, \ 0 \leq y \leq c \tag{4}$$

с начальным условием $B_1(y) = f_1(y),\ 0 \leq y \leq c$. (5)

Данные заносим в таблицу 1, имеющую $c + 1$ столбцов и $n+1$ строк.

Таблица 1 – Расчет функций Беллмана $B_k(y)$

y / $B(y)$	1	2	…	k	…	C
$B_1(y)$	$B_1(1)$	$B_1(2)$	…	$B_1(k)$	…	$B_1(C)$

$B_2(y)$	$B_2(1)$ $[x_2(1)]$	$B_2(2)$ $[x_2(2)]$	…	$B_2(k)$ $[x_2(k)]$	…	$B_2(C)$ $[x_2(C)]$
…	…	…	…	…	……	…
$B_n(y)$	$B_n(1)$ $[x_n(1)]$	$B_n(2)$ $[x_n(2)]$	…	$B_n(k)$ $[x_n(k)]$		$B_n(C)$ $[x_n(C)]$

При заполнении таблицы 5.1 в ее клетке вместе со значениями

$$B_k(y),\ 1 \le k \le n,\ 1 \le y \le c,$$

записываем также (в квадратных скобках) и величину $x_k(y)$, определяемую как то число z, $0 \le z \le y$, на котором в уравнении (4) достигается максимум (если таких чисел несколько, записываем все).

2. Определяем оптимальное значение целевой функции задачи (1)–(3). Максимальная прибыль равна величине $B_n(c)$.

3. Определяем оптимальное распределение сырья между процессами

x_i, $i = \overline{1, n}$.

Из таблицы последовательно находим $x_n^0 = x_n(c)$,

$x_i^0 = x_i(c - \sum\limits_{j=n}^{i-1} x_j^0)$, $i = \overline{n-1, 2}$; $x_i^0 = c - \sum\limits_{j=n}^{2} x_0^0$.

Решений $x^0 = (x_i^0,\ i = \overline{1, n})$ может оказаться несколько.

Замечание

Описанную выше табличную реализацию удобно применять в случае изменения условий задачи (1)–(3): при сокращении или при упрощении либо количества сырья c, либо чисел n технологических процессов. При сокращении чисел c или n для подсчета решения новой задачи рассматривается соответствующая часть таблицы, получаемая путем вычеркивания ненулевых столбцов или строк. При увеличении с или n для получения решения новой задачи таблицу следует нарастить.

Пример 1. Решить следующую задачу распределения ресурсов:

$$\frac{x_1^2}{2} + x_2^2 - x_2 + 2x_3 \to \max, \qquad (6)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5.$$

Решение

Заполняем таблицу 2, рассчитывая функцию Беллмана $B_k(y)$ путем последовательного решения уравнения Беллмана.

Имеем, $f_1(x) = \frac{x_1^2}{2}$, $f_2(x) = x^2 - x$, $f_3(x) = 2x$, $c = 5$, $n = 3$.

а) Для первой строки таблицы:

$B_1(y) = f_1(y) = \frac{y^2}{2}$, $1 \le y \le 5$.

$B_1(1) = 0{,}5$; $B_1(2) = 2$; $B_1(3) = 4{,}5$; $B_1(4) = 8$; $B_1(5) = 12{,}5$;

б) для второй строки таблицы:

$B_2(y) = \max\limits_{0\le z\le y}[f_2(z)+B_1(y-z)] = \max\limits_{0\le z\le y}\left[z^2 - z + \frac{(y-z)^2}{2}\right]$; $1 \le y \le 5$;

$B_2(1) = \max\limits_{0\le z\le 1}\left[z^2 - z + \frac{(1-z)^2}{2}\right] = \max[0+0{,}5;\ 0+0] = 0{,}5$; $x_2(1) = 0$;

$B_2(2) = \max\limits_{0\le z\le 2}\left[z^2 - z + \frac{(2-z)^2}{2}\right] = \max[0+2;\ 0+0{,}5;\ 2+0] = 2$;

$x_2(2) = \begin{cases} 0 & ; \\ 2 & ; \end{cases}$

$B_2(3) = \max\limits_{0\le z\le 3}[0+4{,}5;\ 0+2;\ 2+0{,}5;\ 6+0] = 6$; $x_2(3) = 3$;

$B_2(4) = \max\limits_{0\le z\le 4}[0+8;\ 0+4{,}5;\ 2+2;\ 6+0{,}5;\ 12+0] = 12$; $x_2(4) = 4$;

$B_2(5) = \max\limits_{0\le z\le 5}[0+12{,}5;\ 0+8;\ 2+4{,}5;\ 6+2;\ 12+0{,}5;\ 20+0] = 20$; $x_2(5) = 5$;

в) для третьей строки таблицы:

$B_3(y) = \max\limits_{0\le z\le y}[f_3(z)+B_2(y-z)] = \max\limits_{0\le z\le y}[2z+B_2(y-z)]$; $1 \le y \le 5$;

$B_3(1) = \max\limits_{0\le z\le 1}[2z+B_2(1-z)] = \max[0+0{,}5;2+0] = 2$; $x_3(1) = 1$;

$B_3(2) = 4$; $x_3(2) = 2$;

$B_3(3) = 6$; $x_3(3) = \begin{cases} 0 & ; \\ 3 & ; \end{cases}$

$B_3(4) = 12$; $x_3(4) = 0$;

$B_3(5) = 20$; $x_3(5) = 0$.

Таблица 2 – Расчет функций Беллмана

$B(y)$ \ y	1	2	3	4	5
$B_1(y)$	0,5	2	4,5	8	12,5
$B_2(y)$	0,5 [0]	2 [0; 2]	6 [3]	12 [4]	20 [5]
$B_3(y)$	2	4	6	12	20

	[1]	[2]	[0; 3]	[0]	[0]

$x_3^0 = x_3(5) = 0,\ \ x_2^0 = x_2(5-0) = 5,\ \ x_1^0 = 0 - x_2^0 - x_3^0 = 0.$

Ответ: $B_3(5) = 20$, $x^0 = (0, 5, 0)$.

Пример 2. Найти решение задачи (5) при сокращении ресурса на 2.

Решение

Из таблицы 2 получим $B_3(3) = 6$; имеем два решения:

$\overline{x_3^0} = 3, \overline{x_2^0} = 0, \overline{x_1^0} = 0,$

$\overline{\overline{x_3^0}} = 0, \overline{\overline{x_2^0}} = 3, \overline{\overline{x_1^0}} = 0.$

Ответ: $\overline{x^0} = (0, 0, 3)$, $\overline{\overline{x^0}} = (0, 3, 0)$.

Задание. Записать задачу в виде (1)–(3).

1. Решить задачу распределения ресурсов при $c = 6$, $n = 3$.
2. Найти решение задачи в случае сокращения ресурсов на одну единицу, $c = 5$.
3. Определить, эффективно ли введение еще одного дополнительного технологического процесса f_4?

Номер варианта выбирается по таблице 3:

Таблица 3 – Варианты заданий

i^*	f_1	f_2	f_3	f_4
1-10	$А_i$	$Б_i$	$В_i$	$Б_i+1$
11-17	$А_i$ -10	$Б_i$ -9	$В_i$ -8	$Б_i$ -8
18-24	$А_i$ -17	$Б_i$ -15	$В_i$ -16	$Б_i$ -14
25-28	$А_i$ -24	$Б_i$ -21	$В_i$ -20	$Б_i$ -20
Примечание – * *i*– порядковый номер студента по журналу.				

Варианты функций прибыли:

А. $f(x) = 0$, $x = 0$ – для всех вариантов.

1. $\begin{cases} x^2 - 1, & x = 1, 2, 3 \\ 2x + 1, & x = 4, 5, 6 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2^x - 2, & x = 1, 2, 3 \\ \dfrac{x^2}{2} - 2x + 6, & x = 4, 5, 6 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4 + x^2 - 2x, & x = 1, 2, 3 \\ 2x + 3, & x = 4, 5, 6 \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + 2x, & x = 1, 2, 3 \\ x + 6, & x = 4, 5, 6 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3^{x-2}, & x=1,2,3 \\ 2^x-2, & x=4,5,6 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x-2, & x=1,2,3 \\ 2^{x-3}+3, & x=4,5,6 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x^2, & x=1,2,3 \\ 9, & x=4,5,6 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^2-1, & x=1,2,3 \\ 2x+1, & x=4,5,6 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x+1, & x=1,2,3 \\ \dfrac{x^2}{4}+3, & x=4,5,6 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x\ , & x=1,2,3 \\ 10, & x=4,5,6 \end{cases}$

Б.

1. $\frac{1}{2}(x^2-3x)$

2. $\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}$

3. $\frac{1}{18}(x^3-x^2)$

4. $\frac{1}{2}x$

5. $0{,}03\,[\,2^x-(x-1)^2\,]$

6. $0{,}2(x^2+3x)$

7. $2(7x-x^2)$

8. $0{,}05\left[3^{x-1}-\frac{(x-1)^2}{3}\right]$

9. $2x$

10. $0{,}3(x^2+2x)$

В. Таблица 4 – Варианты функции f_3, заданной в табличном виде

№ \ x	1	2	3	4	5	6
1	0	0	1	2	4	8
2	2	3	4	5	8	11
3	2	2	4	5	6	9
4	2	4	6	8	8	8
5	0	4	5	5	9	10
6	1	1	4	6	8	11
7	2	3	5	7	9	10
8	1	3	5	7	9	10
9	0	2	4	6	8	12
10	0	0	3	5	7	9